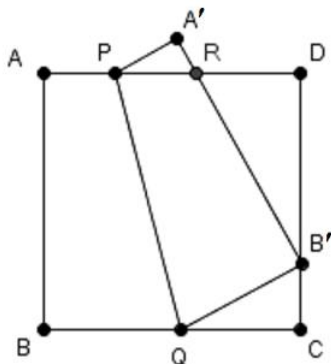


填充題(每題 6 分, 共 36 分)
---------------------

1. 解  $x^4 - 22x^2 - 48x - 23 = 0$ .
2.  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , 且  $\begin{cases} a+b+c+d = 6 \\ a^2+2b^2+3c^2+6d^2 = 10 \end{cases}$ , 若  $a$  的最大值為  $M$ , 最小值為  $m$ , 求數對  $(M, m)$ .
3. 球面上有四點  $P, A, B, C$ , 且  $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$  兩兩垂直,  $\overline{PA} = 2, \overline{PB} = 3, \overline{PC} = 6$ , 求此球體的體積.
4.  $a \in \mathbb{R}$ , 過  $P(a, 2)$  作  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  的切線, 若所作的切線恰有一條, 求  $a$  的範圍.
5. 數列: 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 26,  $\dots$ , 依此規則, 若第  $n$  項為  $a_n$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ .
6. 設點  $A, B$  為  $\Gamma: y^2 = 4x$  上除頂點  $O$  外的兩相異動點, 已知  $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ , 且  $M$  為  $\overline{AB}$  上的點,  $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ , 求  $M$  的軌跡方程式.

計算題(共 64 分)
-------------

1. 數列  $\langle a_n \rangle$ , 已知  $a_1 = 2$ , 設此數列前  $n$  項的和為  $S_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  時,  $a_n$  為  $3S_n - 4$  與  $2 - \frac{5}{2}S_{n-1}$  的等差中項,
  - (a) 求  $a_n$ . (6 分)
  - (b) 證明:  $\frac{1}{2}(\log_2 S_n + \log_2 S_{n+2}) < \log_2 S_{n+1}$ . (6 分)
2. 證明 1023 可以整除  $2^{999} + 2^{888} + 2^{777} + \dots + 2^{222} + 2^{111} + 1$ . (10 分)
3. 一袋中有  $m$  個白球與  $n$  個黑球, 自袋中一次取一球, 取後不放回, 直到取完所有白球才停止, 求所取球數的期望值. (10 分)
4. 如圖,  $ABCD$  是邊長為 1 的正方形, 沿  $\overline{PQ}$  對折, 使得  $A, B$  對折之後分別重合於  $A', B'$  兩點, 且  $B'$  在  $\overline{CD}$  上,



- (a) 證明  $\triangle RB'D$  的周長為 2. (6 分)
  - (b) 求  $\triangle QB'C$  的最大面積. (6 分)
5. 四面體  $ABCD$  中,  $M, N$  分別為  $\overline{AD}, \overline{BC}$  的中點,  $\overline{MN} \perp \overline{AD}$  且  $\overline{MN} \perp \overline{BC}$ , 證明
    - (a)  $\overline{AB} = \overline{CD}$ . (5 分)
    - (b)  $\overline{AC} = \overline{BD}$ . (5 分)
  6.  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ , 求兩焦點座標. (10 分)