

國立台中高工 97 學年度第 1 學期教師甄選數學科筆試試題

一、填充題(請將答案依題號順序書寫至答案欄)(每格 4 分，共 80 分)

1. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{4}$ ， $\cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$ ， $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$ ，則 $\sin 2\beta =$ _____。
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax - (6b + 2)}{\sqrt{x} - 2} = 20$ ，則 $(a, b) =$ _____。
3. 已知 $36^x - 6^{x+1} + a = 0$ 有二實根，則 a 的範圍為 _____。
4. $x^3 - 6x^2 - 15x - k = 0$ 有三個相異實根，則 k 之範圍為 _____。
5. 試求方程式 $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 3$ 有 _____ 組非負整數解。
6. 設 $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ ，試求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} =$ _____。
7. 若 $x \in \mathbb{Z}$ ，使得多項式 $2x^2 - x - 36$ 的值是某個正質數的平方，則 $x =$ _____。
8. 若 $|\vec{\alpha}| = 4$ ， $|\vec{\beta}| = 10$ ， $\vec{\alpha}$ 與 $\vec{\beta}$ 之夾角 60° ，則 $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ 之長為 _____。
9. 設函數 $y = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x$ ，且 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，則當 $x = \alpha$ 時，函數 y 有最小值 m ，
試求數對 $(\alpha, m) =$ _____。
10. 設 a 為不等於零之任意實數，則方程式 $y = ax^2 + (1-a)x + (5-12a)$ 會通過哪幾個定點 _____。
11. 解不等式： $\log_{\frac{1}{3}} [\log_3(x^2 - x + 1)] > 0$ ，_____。
12. 試求以橢圓 $\frac{(x+1)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{75} = 1$ 的右焦點為圓心，且與雙曲線 $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ 之兩條漸近線都相切的圓的方程式？_____。
13. 已知 α, β 為方程式 $x^2 - (2-i)x + 3-2i = 0$ 的兩根，試求 $|\alpha - \beta|^2 =$ _____。
14. 設 k 為實數，已知 $3+2i$ 是方程式 $x^3 - 7x^2 + kx - 13 = 0$ 的一個根，試求 k 之值？_____。

國立台中高工 97 學年度第 1 學期教師甄選數學科筆試試題

15. 試問由正五邊形的邊及其對角線，共可決定出幾個不同的三角形？_____。

(包括延長線相交所構成的)

16. 設 $x, y \in R^+$ ，且 $2x + y = 1$ ，試求 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 之最小值？_____。

17. 試求 $\int_{-1}^2 \frac{3x^5}{\sqrt{x^3+1}} dx = ?$ _____。

18. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle B = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 10\sqrt{3}$ ， $\overline{AC} = 10$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積？_____。

19. 已知直線 L 過 $P(2,1)$ ，且被兩條平行直線 $l_1: 3x + 4y - 1 = 0$ 及 $l_2: 3x + 4y - 6 = 0$ 所截得的線段長為 $\sqrt{2}$ ，試求直線 L 的斜率？_____。

20. 設函數 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$ ，試求 $f(x)$ 之極大值？_____。

二、計算證明題(請註明題號)(每題 10 分，共 20 分)

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 0$ ， $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{3-a_n}$ ， $(n \geq 1)$

(1) 請推測 a_n 之值(以 n 表示) (5 分)

(2) 利用數學歸納法，證明你的推測成立(5 分)

2. n 個不同的小球任意放到 m ($m \geq n$) 個不同的盒子中，且每個盒子容納的球數不限，試問：

(1) 共有幾種放法？(4 分)

(2) 若指定的 n 個盒子中各放 1 個小球，則機率為多少？(3 分)

(3) 若非指定的 n 個盒子中各放 1 個小球，則機率為多少？(3 分)