114 學年度臺北市立永春高中第 1 次正式教師甄選數學科試題卷

※請用藍、黑原子筆於答案卷中作答，答案若為分數或根式請化至最簡。

一、填充題：每題 7 分，共 70 分

1. 對於甲、乙兩袋球，下面的動作稱之為「交換」：分別自甲、乙兩袋中同時取出一球，接著將取自甲袋的球放入乙袋、取自乙袋的球放入甲袋。若甲袋中原有1白球與1黑球，乙袋中原有3白球與3黑球，經過無限多次「交換」後，甲袋中仍有1白球與1黑球的機率會趨近一個定值，求此定值。

2. 從 INSTITUTIONALIZED 這個單字中，任選4個字母排成一列，求所有的排法數。

3. 解方程式$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2+x+5}=\sqrt{x^2-3x+13}$。

4. 曲線Γ的極坐標方程式為$r=1+cos\theta$，其中$0\leq\theta\leq\pi$，試求Γ上的點之x坐標最小值。

5. 已知隨機變數X的機率質量函數$P(X=n)=\frac{a}{2^n}+\frac{b}{3^n}$，其中$n=1,2,3,\cdots$，且$X$的期望值為$\frac{15}{8}$，試求數對$(a,\ b)$。

6. 坐標平面上，正六邊形$OABCDE$之頂點依逆時針排列為O（原點）、A、B、C、D、E，其中直線OA之方程式為$y=3x$，直線BE之方程式為$y=3x+2$，試求此正六邊形的外接圓之圓心坐標。

7. 已知在ΔABC中，三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$長度的比例為$4:6:5$，其內部一點P滿足$\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$的長度分別是8、4、13，試求$\cos(\angle APB)$之值。

8. 設矩陣$A=\begin{bmatrix}7 & -8\\ -7 & 8\end{bmatrix}$滿足$(I+A)^n=I+a_nA$，其中$n$為自然數，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，且$\{a_n\}$為一個數列，請寫出$a_n$的一般式（請用$n$的代數式表示）。

9. 設數列$\{a_n\}$的一般式為$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})}$，試求$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$之值。

10. 函數$f(x)=ln(x+1)$上有一點$A(1,ln2)$，區域R代表由過A的法線、函數$y=f(x)$的圖形與y軸所圍成的封閉區域，將R繞y軸旋轉可得立體S，求S的體積。

二、計算證明題：每題 10 分，共 30 分

1. 已知O為ΔABC的外心，且滿足$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BA}$，試求$cosB$的最小值。

2. 有一筆資料包含n個數$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$，其平均數為$\overline{X}$，試證$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}^2}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\overline{X}\right|$。

3. 空間中$A-BCD$為一正四面體，P、Q、R依序為$\overline{AC}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$三邊的中點，若ΔPQR所決定的平面E交$\overline{AD}$於S，試證$PQRS$為一正方形。