# 國立馬祖高級中學114學年度第1次專任教師甄選

# 初試試題卷-數學科

## —作答注意事項—

考試時間： 70 分鐘

作答方式：

- 答案卷限用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫，更正時，可以使用修正帶（液）。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。

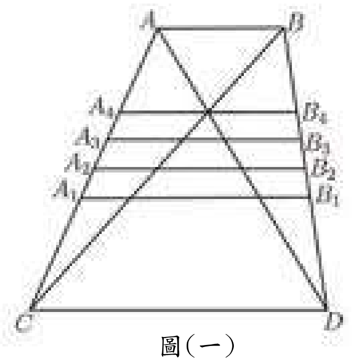
選擇題計分方式：

- 單選題：每題有$n$個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有$n$個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯$k$個選項者，得該題$\frac{n-2k}{n}$的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

# 國立馬祖高級中學114學年度第1次正式教師甄試 數學科 試題卷

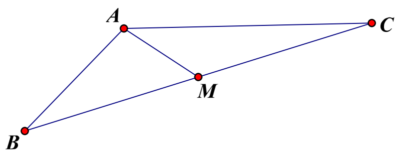
單選題（一題3分，共75分）

1. 若整式$f(x)$除以$(x-1)^2$的餘式是$5x+1$，除以$(x-2)^2$的餘式是$6x+1$。則$f(x)$除以$(x-1)^2(x-2)$的餘式為下列何者？
   (A)$2x^2+x+3$ (B)$2x^2+x-1$ (C)$x^2+2x+3$ (D)$x^2-x+1$ (E)$x^2+x+1$。
2. 如附圖(一)，梯形ABDC的上底$\overline{AB}=a$，下底$\overline{CD}=b$，且截線段$\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3B_3}$、$\overline{A_4B_4}$皆平行梯形的上下底，其中截線段$\overline{A_4B_4}$正好通過梯形對角線$\overline{AD}$、$\overline{BC}$的交點，則$\overline{A_4B_4}=?$
   (A)$\frac{a+b}{2}$ (B)$\sqrt{ab}$ (C)$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (D)$\frac{2ab}{a+b}$ (E)$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}$。



圖(一)

3. 若$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=4$，$x=a+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$，$y=b+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$，則$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$的值為何？
   (A)8 (B)9 (C)12 (D)16 (E)24。
4. 設$a$、$b$同號，且$a^2-2ab-9b^2=0$，求下式：$log(a^2+ab-6b^2)-log(a^2+4ab+15b^2)$的值為何？
   (A)1 (B)$\frac{3}{2}$ (C)$-\frac{3}{2}$ (D)$\frac{1}{2}$ (E)$-\frac{1}{2}$。
5. 若$\frac{z}{z-1}$為純虛數，試問當$z$變動時，它的圖形將是怎樣的曲線？
   (A)圓 (B)橢圓 (C)雙曲線 (D)拋物線 (E)一直線。
6. 將五個字母A、B、C、D、E任意排成一列，試問：A在B的右邊，同時C在D的右邊之機率為何
   (A)$\frac{3}{5}$ (B)$\frac{2}{5}$ (C)$\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{3}$ (E)$\frac{1}{2}$。
7. 已知$\Delta ABC$中 $\frac{7}{sinA}=\frac{8}{sinB}=\frac{13}{sinC}$，試求$\angle C=?$
   (A)30° (B)45° (C)60° (D)120° (E)150°。
8. 如附圖(三)，在$\Delta ABC$中，已知$\angle A=135°$，$\overline{BC}=4$，$\angle B=2\angle C$，試求過A的中線$\overline{AM}$之長度為何？
   (A)$2\sqrt{3}-2$ (B)$2\sqrt{2}$ (C)$2\sqrt{3}$ (D)$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ (E)$\sqrt{6}-\sqrt{2}$。



圖(三)

9. 若$p=\frac{1}{3}$，則$\sum_{k=1}^{\infty}kp^k=p+2p^2+3p^3+\cdots$之值為何？

(A)$\frac{3}{4}$ (B)$\frac{1}{4}$ (C)$\frac{2}{3}$ (D)$\frac{1}{3}$ (E)$\frac{1}{2}$。

10. 已知$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{101}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$，則$a+b+c+d+e+f+g+h+i=?$

(A)0 (B)$-1$ (C)$-2$ (D)$-3$ (E)$-4$。

11. 設雙曲線$\Gamma:\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{4}=1$與直線 L 交於$A,B$兩點，且$A,B$兩點的中點為$M(5,1)$，則直線 L 的方程式為何？

(A)$y=4x-19$ (B)$y=3x-14$ (C)$y=2x-9$ (D)$y=x-4$ (E)$y=-x+6$。

12. 在空間中，平面$\pi: 2x+y+z=5$，$A(3,1,4),B(8,5,-4)$，欲在平面$\pi$上取一點 C，使$\overline{CA}+\overline{CB}$為最小，則點 C 坐標為何？

(A)$(1,-2,5)$ (B)$(2,-1,2)$ (C)$(1,2,1)$ (D)$(2,1,0)$ (E)$(2,3,-2)$。

13. 已知方程式$x^3-7x^2+cx-8=0$的三根成等比數列，則$c$之值為何？

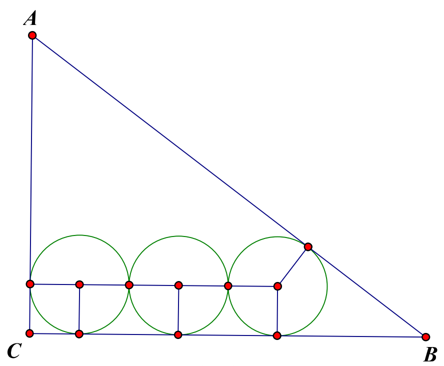
(A)16 (B)14 (C)12 (D)10 (E)8。

14. 試求$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+5\sqrt{\cdots}}}}}$之值為何？

(A)12 (B)8 (C)6 (D)4 (E)2。

15. 如附圖(五)，在直角ΔABC中，兩直角邊$\overline{AC}=30,\overline{BC}=40$，在ΔABC內作一排三個等圓都切於$\overline{BC}$，並且一端的圓切於$\overline{AB}$，另一端的圓切於$\overline{AC}$，中間的圓切於兩端的圓，則等圓的半徑為何？

(A)6 (B)$4\sqrt{2}$ (C)$3\sqrt{3}$ (D)$2\sqrt{5}$ (E)5。



圖(五)

16. 考慮實數二階方陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，若$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -9 & -7 \end{bmatrix}$，試問$c+2b$的值為何？

(A) $-11$ (B) $-4$ (C) 1 (D) 10 (E) 11

17. 坐標平面上，$P(a,0)$為$x$軸上一點，其中$a>0$。令$L_1$、$L_2$為通過$P$點，斜率分別為$-\frac{4}{3}$、$-\frac{3}{2}$的直線。已知$L_1$、$L_2$分別與兩坐標軸圍成的兩個直角三角形的面積差為 6，試問$a$值為何？

(A) $3\sqrt{2}$ (B) 6 (C) $6\sqrt{2}$ (D) 9 (E) $8\sqrt{2}$

18. 設 $a_1,a_2,a_3,a_4$ 是首項為 10 、公比是 10 的等比數列。令 $b=\sum_{n=1}^{3}\log_{a_n}a_{n+1}$ ，試選出正確的選項。

(A) $2<b\le 3$　(B) $3<b\le 4$　(C) $4<b\le 5$　(D) $5<b\le 6$　(E) $6<b\le 7$

19. 袋子裡有編號分別為 1, 2, ... , 100 的 100 顆球，某甲從袋中隨機抽取一球，每顆球被抽到的機率均相等。試問在下列哪個選項的條件下，某甲抽到 7 號球的條件機率最大？

(A)某甲抽到球的號碼是奇數　(B)某甲抽到球的號碼是質數　(C)某甲抽到球的號碼是 7 的倍數
(D)某甲抽到球的號碼不是 2, 3, 5 的倍數　(E)某甲抽到球的號碼不大於 15

20. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 $O$。從 $O$ 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 $P$、$Q$，試問所得向量 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 的內積，期望值為下列哪一個選項？

(A) $\frac{4}{7}$　(B) $\frac{5}{7}$　(C) $\frac{6}{7}$　(D) 1　(E) $\frac{8}{7}$

21. 某校全體高三學生都有報考學測數學 $A$ 或數學 $B$，在這些學生中只報考數學 $A$ 的學生占全體高三學生的 $\frac{2}{5}$ 。報考數學 $A$ 的學生中有 $\frac{1}{2}$ 的學生同時也報考數學 $B$。試問只報考數學 $B$ 的學生在該校所有報考數學 $B$ 的學生中所占的比例是下列哪一個選項？

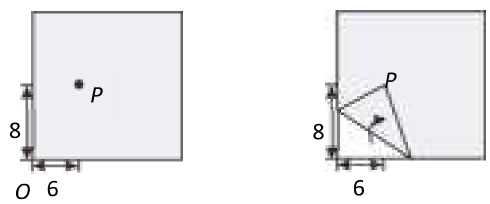
(A) $\frac{1}{6}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{7}$　(D) $\frac{3}{10}$　(E) $\frac{3}{5}$

22. 設二次函數 $f(x)=x^2+bx+c$，其中 $b$、$c$ 為實數。已知 $f(x-2)=f(-x-2)$ 對任意實數 $x$ 均成立，且 $-3\le x\le 1$ 時，$f(x)$ 的最大值會是最小值的 4 倍，試問 $f(x)$ 的最小值是下列哪一個選項？

(A) 0　(B) $\frac{5}{3}$　(C) 3　(D) 4　(E) 6

23. 正方形紙張上有一點 $P$，$P$ 點距離紙張左邊界 6 公分，距離下邊界 8 公分。今將紙張的左下角 $O$ 點往內摺至 $P$ 點，如圖所示。試問摺進去的三角形面積為何？ (單位:平方公分)

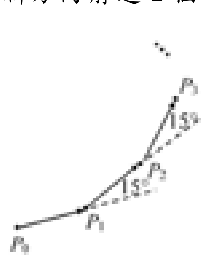
(A) $\frac{625}{12}$　(B) $\frac{625}{24}$　(C) $\frac{625}{32}$　(D) $\frac{625}{36}$　(E) $\frac{625}{48}$




24. 如圖所示，平面上有一點 $P_0$ 先朝某方向前進 2 個單位長到達點 $P_1$ 後，依前進方向左轉 15 度；朝新方向前進 2 個單位長到達點 $P_2$ 後，然後再依前進方向左轉 15 度；再朝新方向前進 2 個單位長到達點 $P_3$ 後，...依此類推。

試問向量 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 與 $\overrightarrow{P_5P_6}$ 的內積之值為何？

(A) $2\sqrt{5}$　(B) $5\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{10}$　(D) $2\sqrt{2}$　(E) $4\sqrt{10}$




25. 坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$。已知 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(2,-1,0)$，且 $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(-1,2,3)$。試問由 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ 所張出的平行六面體之體積為何？

(A) $2\sqrt{5}$　(B) $5\sqrt{2}$　(C) $2\sqrt{10}$　(D) $4\sqrt{5}$　(E) $4\sqrt{10}$

多選題（一題5分，共25分）

1. 設 $z$ 為非零複數，且設 $\alpha=|z|$、$\beta$ 為 z 的輻角，其中 $0\le\beta<2\pi$（其中 $\pi$ 為圓周率）。對任一正整數 $n$，設實數 $x_n$ 與 $y_n$ 分別為 $z^n$ 的實部與虛部。試選出正確選項。

(A) 若 $\alpha=1$ 且 $\beta=\dfrac{3\pi}{7}$，則 $x_{10}=x_3$　　(B) 若 $y_3=0$，則 $y_6=0$

(C) 若 $x_3=1$，則 $x_6=1$　　(D) 若數列 $\langle y_n\rangle$ 收斂，則 $\alpha\le1$

(E) 若數列 $\langle x_n\rangle$ 收斂，則數列 $\langle y_n\rangle$ 也收斂

2. 坐標平面上，考慮兩函數 $f(x)=x^5-5x^3+5x^2+5$ 與 $g(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的函數圖形（其中 $\pi$ 為圓周率）。選出正確的選項。

(A) $f'(1)=0$　　(B) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為遞增

(C) $y=f(x)$ 在閉區間 $[0,2]$ 為凹向上

(D) 對任意實數 $x$，$g(x+6\pi)=g(x)$

(E) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[3,4]$ 皆為遞增

3. 已知數列 $<a_n>$ 滿足 $3a_{n+1}=a_n+n$（對任意正整數 $n$ 都成立）且 $a_1=2$。令數列 $<b_n>$ 滿足 $b_n=a_n-\frac{n}{2}+\frac{3}{4}$。試選出正確的選項。

(A) $a_2=2$　　(B) $b_2=\frac{3}{4}$　　(C) 數列 $<b_n>$ 是公比為 $\frac{2}{3}$ 的等比數列

(D) 對於任意正整數 $n$，$3^n a_n$ 皆為正整數　　(E) $b^{10}<10^{-4}$

4. 已知某等差數列的首項是 1，末項是 81，且 9 也在此數列中。設此數列的項數為 $n$，其中 $n\le100$。試選出正確的選項。

(A) $n$ 為奇數　　(B) 41 必在此等差數列

(C) 滿足條件的等差數列，其公差都是整數

(D) 滿足條件的等差數列共有 10 個

(E) 若 $n$ 為 7 的倍數，則 $n=21$

5. 設地球是一個球體。地球表面上五個點 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 的經緯度如下表。大圓為通過球心的平面與球面相交所形成的圓，且球面上相異兩點在大圓上所形成較小的弧為最短路徑。根據上述，試選出正確的選項。

(A)「北極點到 $A$ 的最短路徑長」等於「北極點到 $B$ 的最短路徑長」

(B)「$A$ 到 $B$ 的最短路徑長」等於「$C$ 到 $D$ 的最短路徑長」

(C) $A$ 到 $E$ 的最短路徑必經過 $C$

(D) $C$ 到 $D$ 的最短路徑必經過北極點

(E)「$E$ 到北極點的最短路徑長」與「$C$ 到 $D$ 的最短路徑長」的比為 2：3

| 位置 | 經度 0 度 | 經度 180 度 |
|---|---|---|
| 北緯 60 度 | $A$ | $B$ |
| 北緯 30 度 | $C$ | $D$ |
| 緯度 0 度 | $E$ | |

單選題（一題 3 分，共 75 分）

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| A | D | A | E | A |
| 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
| C | D | E | A | D |
| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. |
| C | D | B | D | E |
| 16. | 17. | 18. | 19. | 20. |
| D | C | C | C | C |
| 21. | 22. | 23. | 24. | 25. |
| B | C | B | D | C |

多選題（一題 5 題，共 25 分）

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. |
| BE | ABE | BD | AB | ACD |